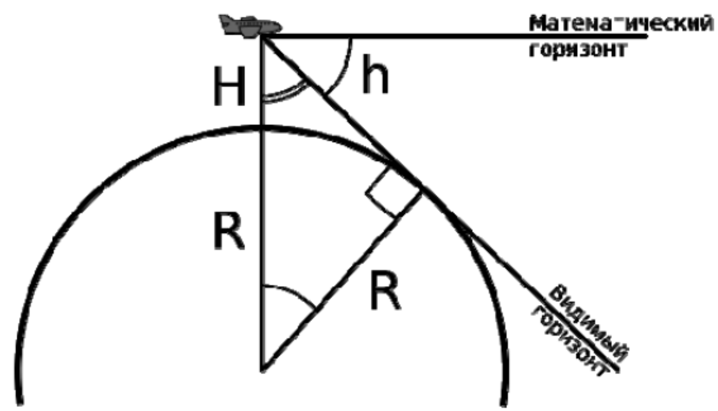
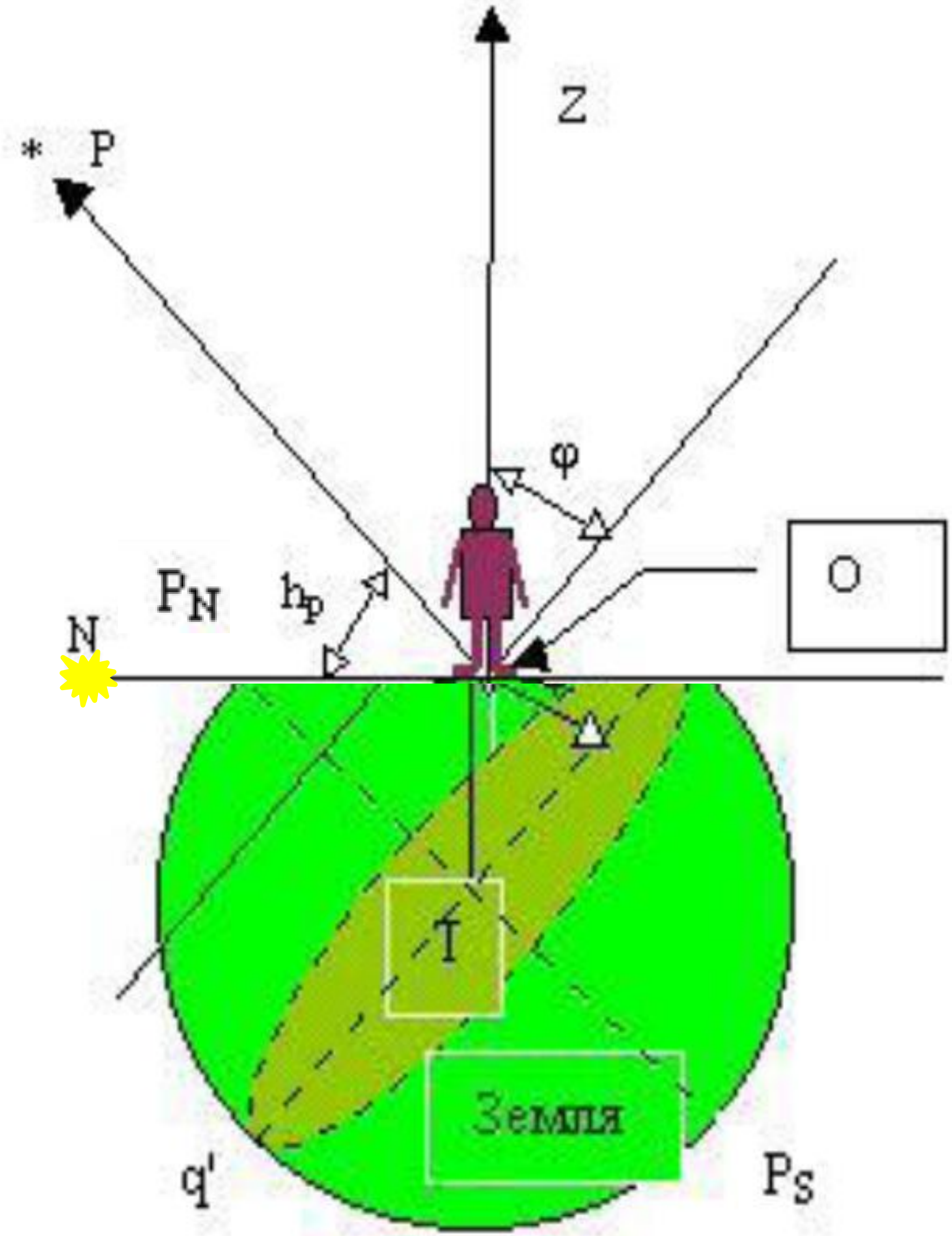
9.1. Условие. Самолет летит на высоте 10 км над поверхностью Земли 21 июня. Его пассажиры видят, как Солнце «замерло» и все время находится в точке севера на видимом горизонте. Определите скорость самолета. Рефракцией, поглощением света в атмосфере, угловыми размерами Солнца, рельефом и сжатием Земли пренебречь.

Хотя по условии задачи мы пренебрегаем рефракцией и видимыми размерами Солнца, мы должны учесть другой фактор: понижение видимого горизонта за счет высоты самолета.

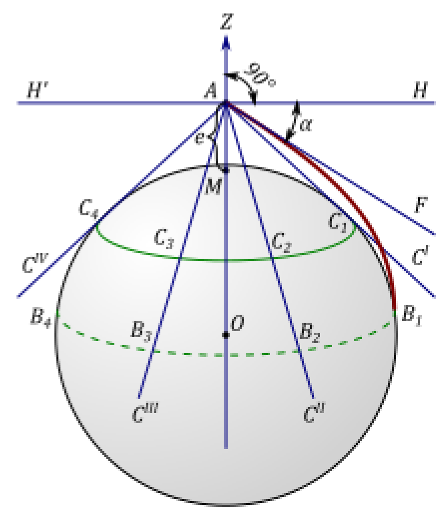


Пусть самолет летит на высоте H над поверхностью Земли. Радиус Земли равен R. Угол h между направлениями на видимый и математический горизонты равен углу с вершиной в центре Земли между направлением на самолет и точку касания луча зрения пассажиров с поверхностью Земли (см. рисунок). Видимый горизонт будет иметь высоту

$$h = -\arccos\frac{R}{R+H} = -3.2°.$$

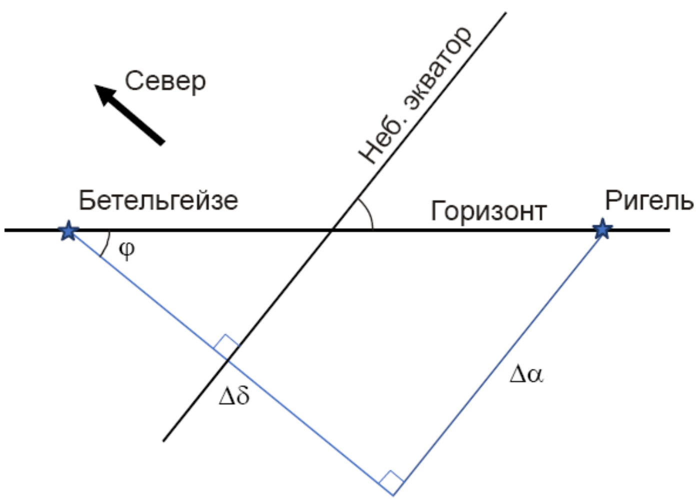


Z
* P
φ
P_N
h_P
N
O
T
Земля
q'
P_S



Z
90°
H'
A
H
α
e
M
F
C_4
C_3
C_2
C_1
C^{IV}
C^{I}
B_4
B_3
O
B_2
B_1
C^{III}
C^{II}

10.1. Условие. В некотором пункте на поверхности Земли звезды Бетельгейзе и Ригель в созвездии Ориона взошли одновременно. Экваториальные координаты Бетельгейзе $05^{ч}55.2^{м}$, $+7°24'$; координаты Ригеля $05^{ч}14.5^{м}$, $-8°12'$. Найдите широту места наблюдения. Атмосферной рефракцией пренебречь.



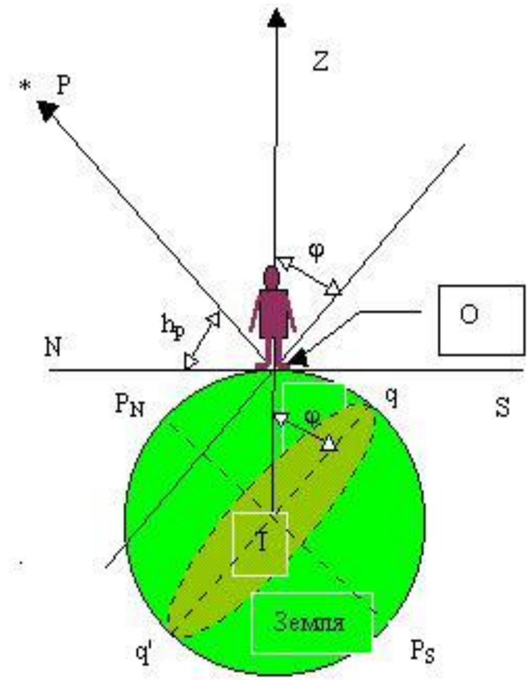


Рис 2.1

$$tg\varphi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} \qquad \varphi = arctg\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} = 33^0$$

10.3. Условие. Желая испытать новое сверхмощное импульсное оружие, а также привести в порядок календарь, жители Земли решили отодвинуть Луну от нашей планеты так, чтобы тропический год содержал ровно 12 синодических лунных месяцев (циклов смены лунных фаз). Какое минимальное значение эксцентриситета нужно будет задать новой лунной орбите, чтобы у землян хотя бы иногда осталась возможность наблюдать полные солнечные затмения с поверхности планеты? Орбиту Земли считать неизменной в ходе испытания. Направление вращения Луны вокруг Земли также сохраняется прежним.

Промежуток времени между двумя последовательными одноименными фазами Луны называется синодическим месяцем. Математическая связь синодического и сидерического периода обращения Луны та же, что и для внутренних планет.

1/P = 1/S - 1/T,

где P,S и T соответственно продолжительность синодического, сидерического месяцев и сидерического года, то есть периода обращения Земли вокруг Солнца.

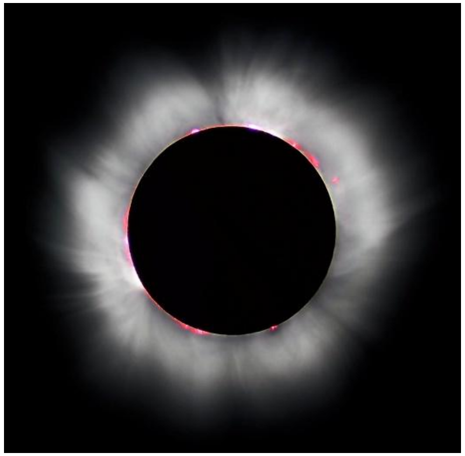
$$S = \frac{PT}{T + P}$$

Сравнивая его с настоящим периодом S_0, мы применяем III закон Кеплера (Квадраты периодов обращений Луны вокруг Земли пропорциональны кубам больших полуосей ее эллиптических орбит) и находим новое расстояние до Луны

$$L' = L_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^{2/3} = 391.6 \ (\text{тыс км})$$

В настоящее время Луна может располагаться на таком расстоянии от Земли

Возможность наблюдать полное солнечное затмение



Совпадение угловых радиусов Луны и Солнца

Так как в условии задачи требуется, чтобы у землян хоть когда-нибудь была возможность наблюдать полное солнечное затмение, мы рассмотрим наиболее благоприятный случай. Пусть Земля находится в афелии своей орбиты, при этом во время затмения Солнце и Луна располагаются в зените. Тогда угловой радиус Солнца будет равен

$$\rho = \frac{R_S}{a(1+e_0)} = 0.00458 \text{ рад.}$$

Здесь R_S – радиус Солнца, a – среднее расстояние от Земли до Солнца, e_0 – эксцентриситет орбиты Земли. Приближение наблюдателя к Солнцу за счет размеров Земли здесь несущественно, но в случае Луны оно уже будет играть роль. Чтобы полное солнечное затмение случилось, Луна в перигее в зените должна иметь хотя бы такой же угловой радиус:

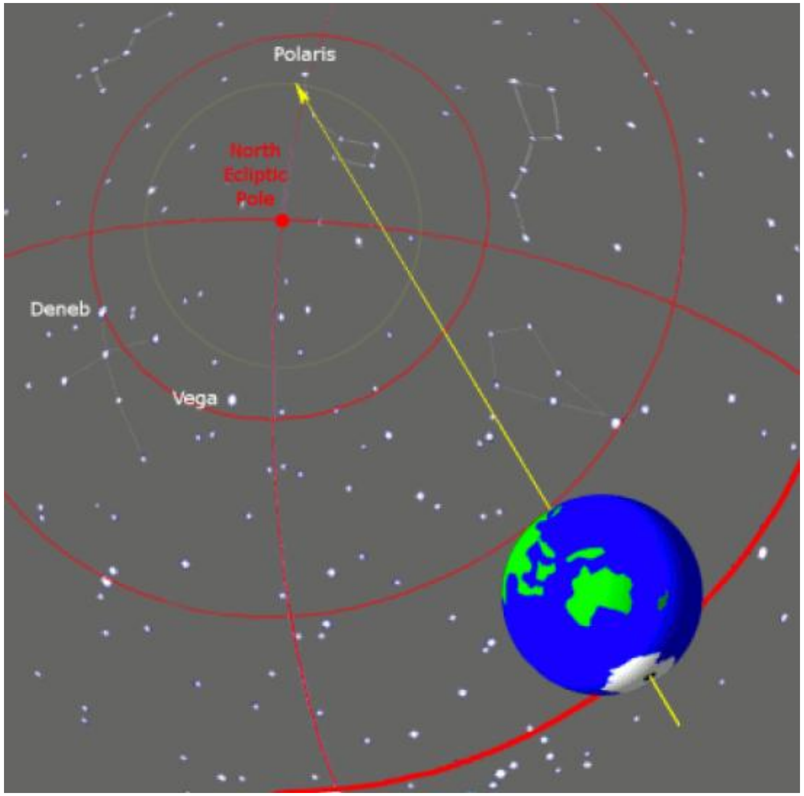
$$\rho = \frac{R_L}{L'(1-e) - R_E}.$$

Здесь R_E и R_L – радиусы Земли и Луны. Отсюда получаем минимальное значение эксцентриситета лунной орбиты:

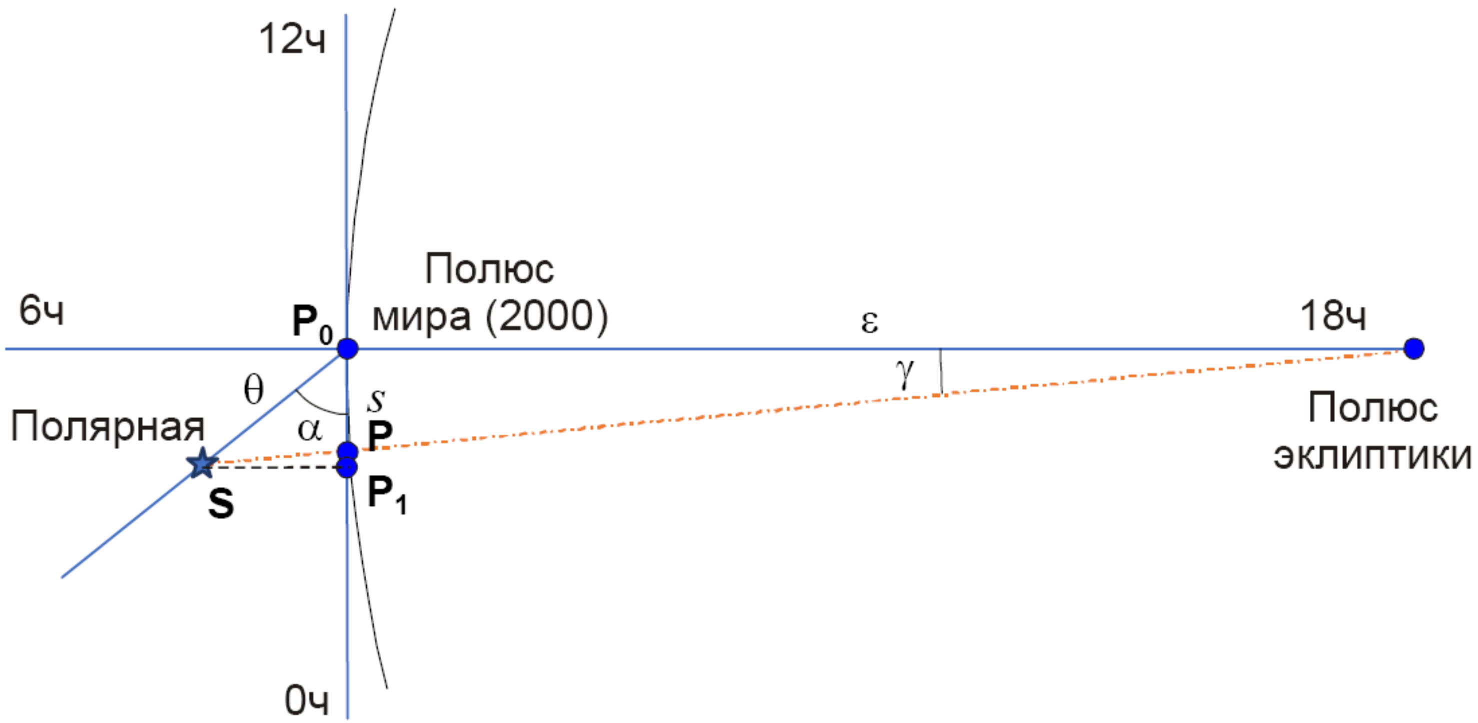
$$e = \frac{R_S(L' - R_E) - R_L a(1+e_0)}{L' R_S} = 0.015.$$

10.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

10.5. Условие. В настоящее время положение северного полюса мира отмечает собой довольно яркая звезда α Малой Медведицы (Полярная). 1 января 2000 года ее экваториальные координаты – прямое восхождение и склонение – были равны соответственно $02^ч31^м48.7^с$, $+89°15'51.0''$. Из-за прецессии земной оси с периодом 25776 лет положение Северного полюса мира медленно изменяется. Определите, в каком году полюс пройдет мимо Полярной на минимальном угловом расстоянии. Оцените это угловое расстояние. Собственное движение звезды и нутацию не учитывать.



10.5. Решение. Северный полюс мира описывает вследствие прецессии окружность вокруг Северного полюса эклиптики в созвездии Дракона, с радиусом ε=23.4° и заданным периодом. Изобразим это движение:



Полюс эклиптики — это точка на небесной сфере, находящаяся на пересечении с перпендикуляром к плоскости эклиптики. Является полюсом эклиптической системы небесных координат.

Решение можно производить с различной степенью точности. Пренебрежем кривизной рассматриваемого участка небесной сферы (в районе полюса мира) и рассмотрим две разных по точности модели. В одной из них полюс мира движется по окружности с центром в полюсе эклиптики, а в другой – по касательной к ней прямой (см. рисунок). В этих двух случаях максимальное сближение с Полярной звездой произойдет в точках **P** и $\mathbf{P_1}$ соответственно. Обозначим текущее угловое расстояние Полярной звезды от полюса мира (90°–δ) как θ. Из теоремы косинусов определим расстояние от Северного полюса эклиптики до Полярной:

$$\rho^2 = \varepsilon^2 + \theta^2 - 2\,\varepsilon\theta\cos(\alpha + \pi/2);$$

$$\rho \approx \varepsilon\sqrt{1 - 2\theta\cos(\alpha + \pi/2)/\varepsilon} \approx \varepsilon + \theta\cos(\pi/2 - \alpha).$$

Во втором выражении мы использовали тот факт, что θ<<ε. Получается, что в более сложной модели минимальное расстояние между Полярной звездой и северным полюсом мира составит

$$\rho - \varepsilon = \theta\sin\alpha = 27.15'.$$

Интересно, что такой же ответ мы получаем в простой модели из анализа прямоугольного треугольника $\mathbf{P_0P_1S}$. Чтобы определить длину пути северного полюса мира до ближайшей к Полярной звезде точки, в более сложной модели нужно воспользоваться теоремой синусов, считая дугу s_0 отрезком прямой линии:

$$s_0 = \varepsilon \sin\gamma = \varepsilon \sin(\pi/2 + \alpha)\frac{\theta}{\rho} = \theta\cos\alpha \, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \theta\sin\alpha}.$$

В простой модели последний множитель обращается в единицу, и из того же прямоугольного треугольника мы получим $s_1 = \theta\cos\alpha$. Значения s_0 и s_1 получаются равными 34.2′ и 34.8′ соответственно, здесь разница двух моделей уже заметна. Дальнейшие вычисления мы можем также производить в плоском приближении, считая траекторию полюса мира окружностью с радиусом ε, и тогда, зная дугу, пройденную по кругу прецессии

$$\gamma_{0,1} = \frac{s_{0,1}}{\varepsilon},$$

мы определяем время, которое потребуется для такого смещения:

$$t_{01,11} = T\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T \cdot s_{0,1}}{2\pi\varepsilon}.$$

Здесь T – период прецессии. Можно рассуждать несколько по-иному, определив проекцию отрезка s на малом круге небесной сферы радиусом ε на большой круг – эклиптику:

$$S_{0,1} = s_{0,1} / \sin \varepsilon.$$

Прецессия земной оси (движение точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики) происходит с угловой скоростью $\Omega=2\pi/T$, что соответствует известной величине 50.3″ в год. Отсюда мы определяем время, за которое точка весеннего равноденствия пройдет дугу S:

$$t_{00,10} = \frac{S_{0,1}}{\Omega} = T\,\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T \cdot s_{0,1}}{2\pi \sin \varepsilon}.$$

От предыдущей модели эти выражения отличаются тем, что вместо угла ε в радианной мере в знаменателе фигурирует его синус. Итак, мы имеем четыре модельных значения искомого времени:

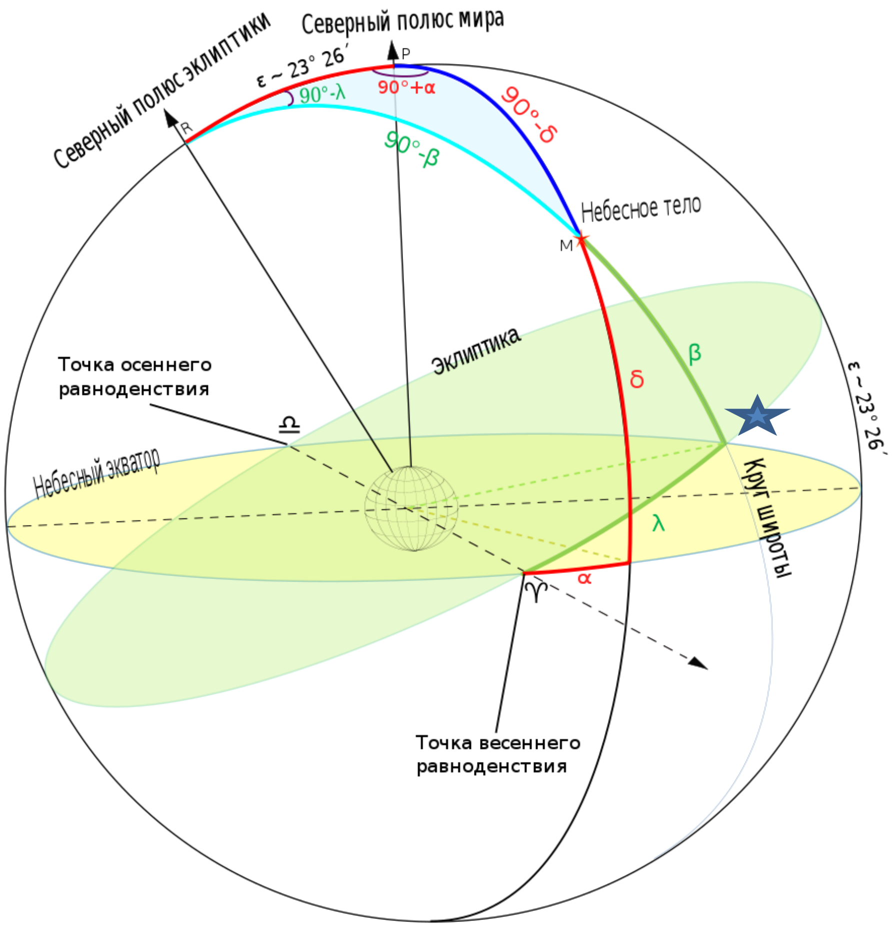
Радиус круга движения полюса мира	Учет кривизны пути полюса мира	Без учета кривизны полюса мира
sin ε	t_{00} = 102.8 лет, 2102 год	t_{10} = 104.6 лет, 2104 год
ε	t_{01} = 99.9 лет, 2099 год	t_{11} = 101.7 лет, 2101 год

Реальный момент максимального сближения на 27′ приходится на 2102 год. Интересно, что наиболее простой метод вычислений (значение t_{11}) вследствие компенсации двух погрешностей дает ответ, близкий к наиболее точному (t_{00}).

10.6. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.6.

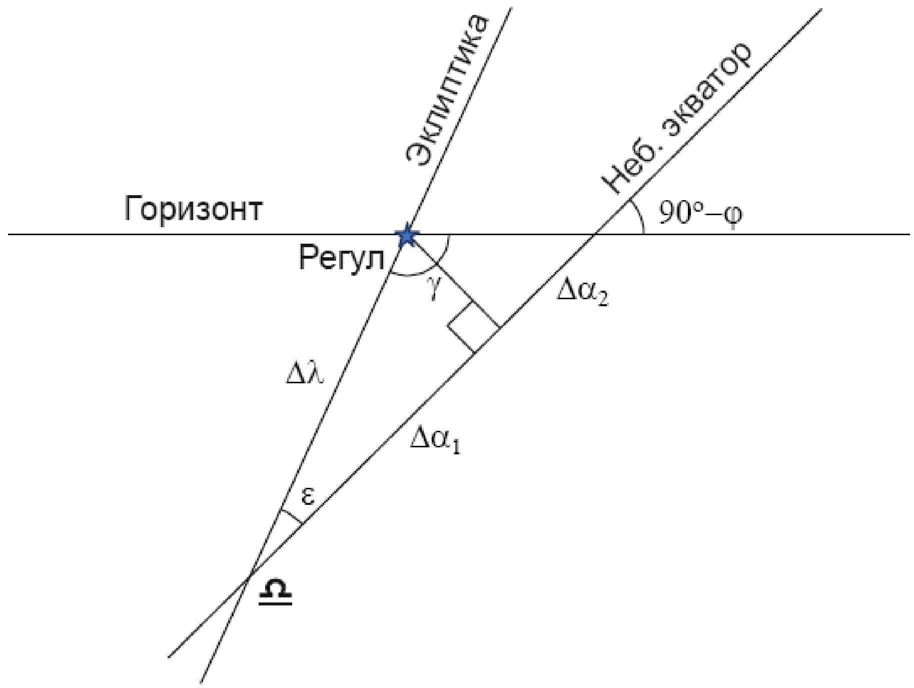
11 класс

11.1. Условие. Эклиптическая долгота Регула, ярчайшей звезды созвездия Льва, равна 150°, эклиптическая широта 0°. Определите среднее солнечное время его восхода 20 марта в Сочи (43.5° с. ш., 39.7° в. д.). Рефракцией, уравнением времени и рельефом местности пренебречь.



Эклиптическая система координат — это система небесных координат, в которой основной плоскостью является плоскость эклиптики, а полюсом — полюс эклиптики. Она применяется при наблюдениях за движением небесных тел Солнечной системы, плоскости орбит многих из которых, как известно, близки к плоскости эклиптики, а также при наблюдениях за видимым перемещением Солнца по небу за год

11.1. Решение. В день весеннего равноденствия точка осени восходит в $18^ч$ по местному времени. Построим чертёж, пренебрегая кривизной рассматриваемого участка небесной сферы:



Здесь ε – угол наклона эклиптики к земному экватору, φ – широта места наблюдения. Исходя из чертежа, можно сделать вывод, что Регул восходит раньше точки осеннего равноденствия благодаря двум факторам: прямое восхождение Регула меньше $12^ч$ (вдоль эклиптики он отстоит от точки осеннего равноденствия к западу на 2 часа), а его склонение положительно (следовательно, он восходит одновременно с точкой небесного экватора, имеющей меньшее, чему у звезды, прямое восхождение). Отсюда имеем:

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\lambda \cos\varepsilon;$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\Delta\lambda \sin\varepsilon}{\tan(90^\circ - \varphi)} = \Delta\lambda \sin\varepsilon \tan\varphi;$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = \Delta\lambda \frac{\cos\varepsilon \cos\varphi + \sin\varepsilon \sin\varphi}{\cos\varphi} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

Другой способ определить величину $\Delta\alpha$ состоит в рассмотрении треугольника, образованного Регулом, точкой осеннего равноденствия и точки востока (пересечения экватора с горизонтом). В этом треугольнике угол с вершиной в положении Регула равен

$$\gamma = (180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \varepsilon) = 90^\circ + \varphi - \varepsilon.$$

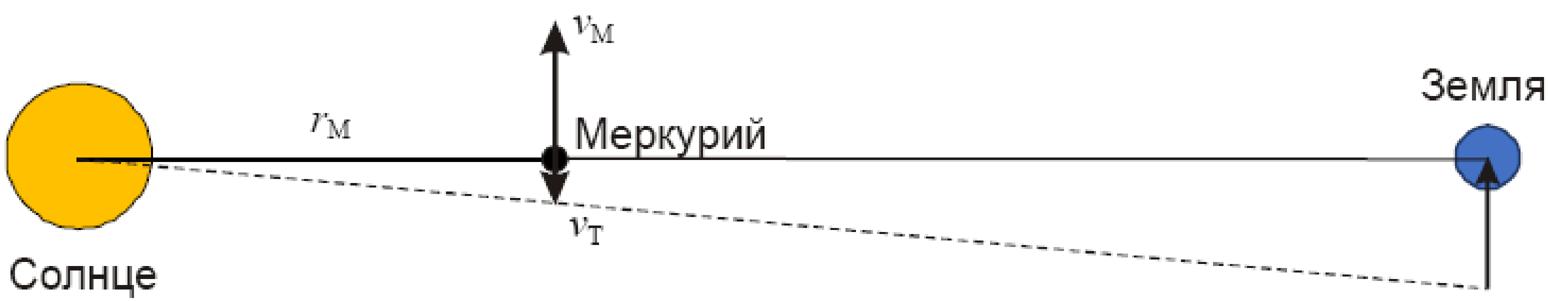
Применяя теорему синусов, получаем

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

В результате имеем разницу во времени восхода в 2ч35м *звездного* времени, что, впрочем, в пределах погрешности расчетов совпадает и с разницей по *солнечному* времени. Восход Регула произойдет в 15ч25м по среднему солнечному времени.

11.2. Условие. 11 ноября 2019 года произошло прохождение Меркурия по диску Солнца, в ходе которого внутренняя планета прошла на небе практически через центр диска звезды. Считая, что это прохождение было в точности центральным, а Меркурий находился в перигелии своей орбиты, оцените, сколько солнечной энергии (в джоулях) недополучила Земля в связи с этим событием. Альбедо Земли не учитывать.

11.2. Решение. «Заморозим» движение Земли вокруг Солнца, перейдя в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца с угловой скоростью, равной орбитальной угловой скорости Земли, систему отсчета.



В этой системе из орбитальной скорости Меркурия в перигелии (a_M – большая полуось орбиты планеты, e – эксцентриситет, r_M – перигелийное расстояние Меркурия)

В этой системе из орбитальной скорости Меркурия в перигелии ($a_{М}$ – большая полуось орбиты планеты, e – эксцентриситет, $r_{М}$ – перигелийное расстояние Меркурия)

$$v_{М} = \sqrt{\frac{GM}{a_{М}} \frac{1+e}{1-e}} = 59.03 \text{ км/с}$$

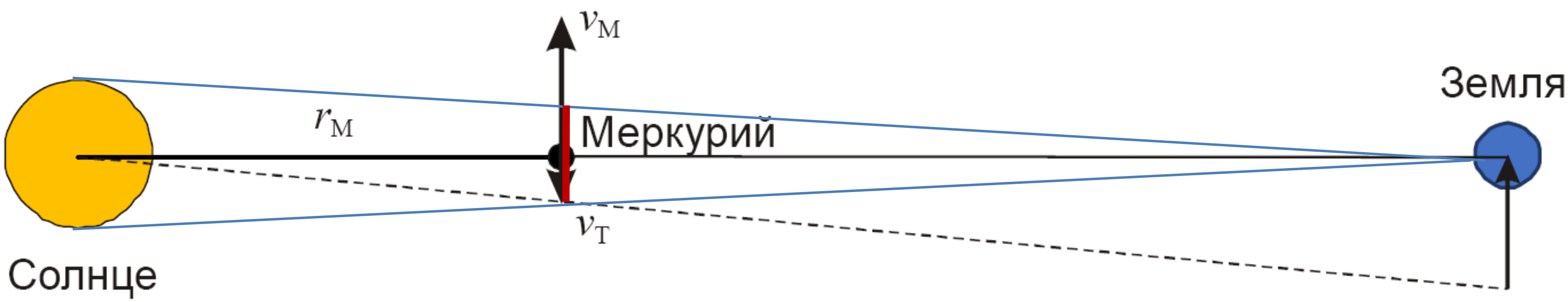
вычитается поправка, связанная с вращением системы отсчета

$$v_{Т} = r_{М}\omega_0 = a_{М}(1-e) \cdot \frac{2\pi}{T_0} = 9.15 \text{ км/с.}$$

Здесь ω_0 и T_0 – угловая скорость и период обращения Земли.

Чтобы пересечь диск Солнца в небе Земли, Меркурий, находящийся ближе к нам, должен пройти в пространстве его диаметр, умноженный на отношение $(a_0 - r_M)/a_0$. Для этого потребуется время

$$T = \frac{2R_S}{v_M - v_T} \cdot \frac{a_0 - r_M}{a_0} = 1.93 \cdot 10^4 \text{ с} = 5.37 \text{ ч}.$$



Здесь R_S – радиус Солнца.

Нахождение дефицита Солнечной энергии

Обратить внимание, что соотношение видимых диаметров Меркурия и Солнца отличается от соотношения их пространственных диаметров, поскольку Меркурий находится ближе к Земле. Это обстоятельство приводит к изменению результата в 2 раза!

Относительное падение освещённости на Земле, обусловленное тем, что Меркурий закрывает часть видимой солнечной поверхности, равно отношению видимых угловых площадей Меркурия и Солнца:

$$K = \pi\left(\frac{R_{\mathrm{M}}}{a_0 - r_{\mathrm{M}}}\right)^2 \Big/ \pi\left(\frac{R_{\mathrm{S}}}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{S}}} \cdot \frac{a_0}{a_0 - r_{\mathrm{M}}}\right)^2 = 2.6 \cdot 10^{-5}.$$

Расчет энергии, которую недополучила Земля

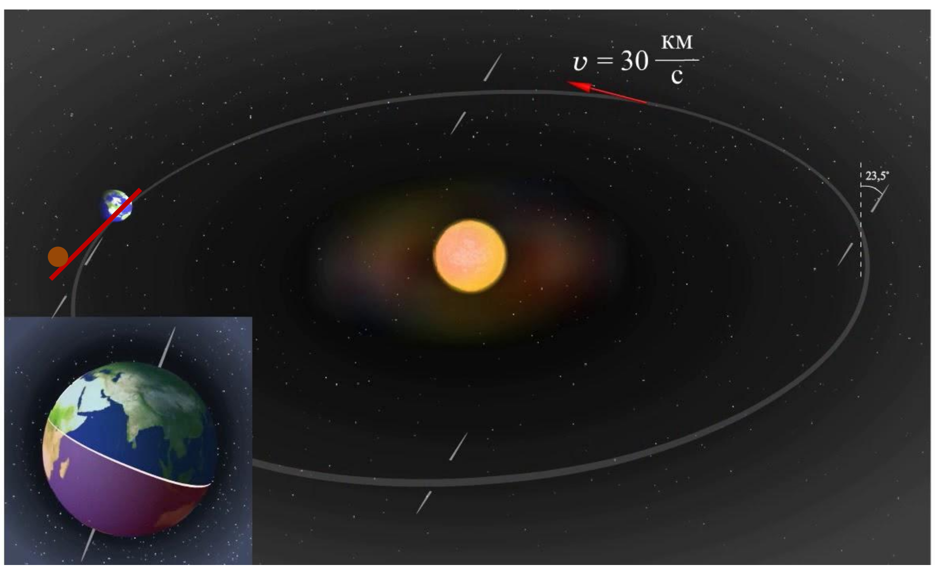
При обычной своей освещенности Солнцем (солнечная постоянная A_0 = 1360 Дж/м^{2}с) Земля за время прохождения «потеряет»

$$Q = T \cdot K \cdot A_0 \cdot \pi R_0^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж.}$$

Здесь R_0 – радиус Земли.

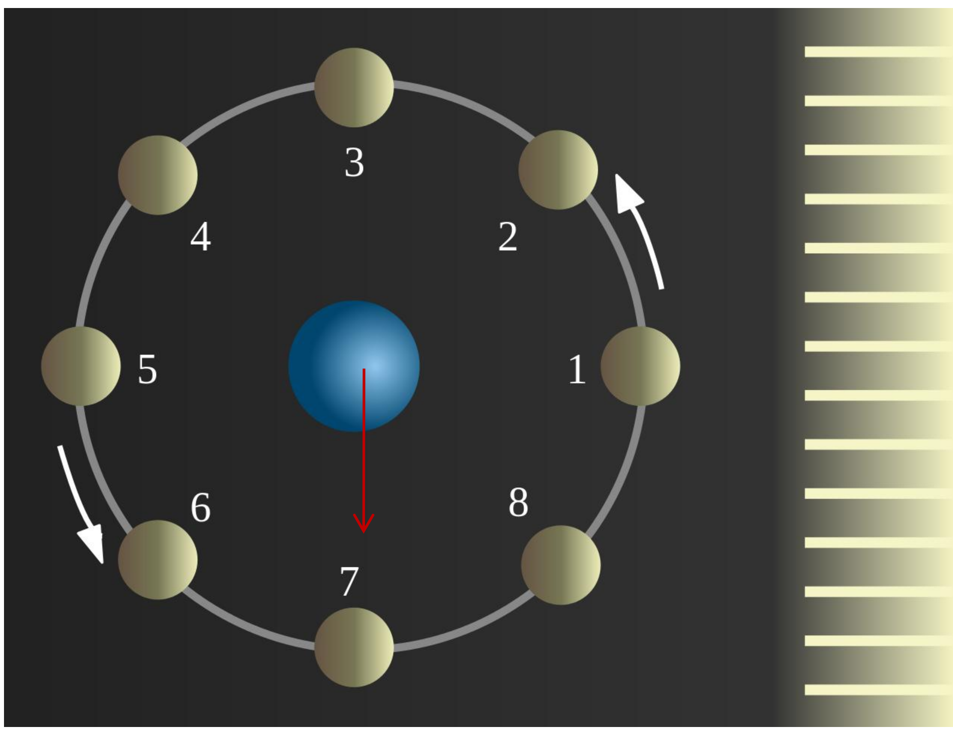
11.3. Условие. Астероид сферической формы, принадлежащий Солнечной системе, ударился в Землю с максимально возможной скоростью, а перед этим в течение суток он был виден в небе Земли невооруженным глазом. Считая грунт астероида аналогичным лунному, определите радиус астероида.

11.3. Решение. Коль скоро астероид принадлежит Солнечной системе, его гелиоцентрическая скорость вблизи Земли не могла превышать параболическую скорость $v\sqrt{2}$ = 42.1 км/с. Здесь v – круговая скорость на орбите Земли, равная 29.8 км/с. Считая орбиту Земли круговой, мы получаем, что максимальная скорость соударения Земли и астероида (встречного) составляет



$$u = v(\sqrt{2} + 1) = 71.9 \text{ км/с.}$$

В течение суток траектории Земли и астероида можно считать прямыми линиями. Обозначив этот период времени как *t*, определяем расстояние между Землей и астероидом за сутки до столкновения L = *ut* = 6.21 млн км. Обратим внимание, что за сутки до удара астероид располагался на том же расстоянии от Солнца, а в небе Земли располагался в 90° от Солнца с западной стороны – только при таком положении возможно его столкновение с Землей с максимальной относительной скоростью. Поэтому по условиям освещения Солнцем и отражения света к Земле он не отличался от Луны в последней четверти.



Луна, как

известно из справочных данных, имеет блеск m_0=–10. Астероид же в это время был на пределе видимости невооруженным глазом, его звездная величина составляла m=6.

Видимая яркость астероида и Луны различается из-за их разных размеров и расстояния до Земли, остальные характеристики одинаковы. Тогда по формуле Погсона:

$$m - m_0 = 2.5\lg\frac{R^2L^2}{r^2L_0^2} = 5\lg\frac{RL}{rL_0}.$$

Здесь L_0 – расстояние от Луны до Земли, R – радиус Луны. В итоге, получаем значение радиуса астероида:

$$r = R\frac{L}{L_0}10^{-0.2(m-m_0)} = 17 \text{ км}.$$

Описанная в условии ситуация представляла бы колоссальную опасность для дальнейшего существования земной цивилизации. Тем не менее, такой астероид был бы виден глазом в небе Земли только в последние сутки перед столкновением.

11.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

11.5. Условие. Черные шары с одинаковой плотностью 1 г/см^3 и радиусами 50 и 100 мкм запущены со скоростью 29.8 км/с (круговой скоростью движения Земли) в одинаковом направлении перпендикулярно направлению на Солнце на расстоянии 1 а.е. от него. Каким будет расстояние между этими шарами через 1 год? Взаимодействие шаров с планетами и друг с другом не учитывать.

11.5. Решение. Как мы видим, скорость шаров равна круговой (первой космической) скорости для данного расстояния от Солнца. Их орбита была бы круговой, если бы на них действовало только притяжение Солнца. Однако, размеры шаров невелики, и заметное влияние на их движение может оказывать сила светового давления. Каждый фотон солнечного излучения передает черному шару свой импульс, который равен E/c, где E – энергия фотона, а c – скорость света. Таким образом, если через единичную площадь за единицу времени проходит количество солнечной энергии, равное I, то все эти фотоны будут иметь суммарный импульс, равный I/c.

Сила давления солнечного излучения на черный шар радиусом r, удаленный от Солнца на расстояние L, составит

$$F_{\nu} = \frac{J \cdot \pi r^2}{4\pi L^2 c} = \frac{J r^2}{4L^2 c}.$$

Здесь J – светимость Солнца, L – расстояние от Солнца до шара. В то же время, гравитационное воздействие от Солнца на шар составляет:

$$F_{\mathrm{G}} = -\frac{GM}{L^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \cdot \rho}{3}.$$

Здесь M – масса Солнца, ρ – плотность шара. Знак "–" указывает на то, что гравитационное действие противоположно световому по направлению. Равнодействующая сил притяжения и

Равнодействующая сил притяжения и светового давления составит

$$F = F_{\mathrm{G}} + F_{\nu} = -\frac{4\pi G M \rho r^3}{3L^2} + \frac{J r^2}{4L^2 c} = -\frac{4\pi G M \rho r^3}{3L^2} \cdot \left(1 - \frac{3J}{16\pi\, G M \rho c r}\right) = -\frac{4\pi\, G M \rho\, r^3}{3L^2}(1 - K).$$

Здесь K – величина отношения модулей светового и гравитационного действия:

$$K = \left|\frac{F_{\nu}}{F_{\mathrm{G}}}\right| = \frac{3J}{16\pi\, G M \rho c r} = \frac{r_0}{r}.$$

Это отношение не зависит от расстояния от Солнца до шара и оказывается равным единице при радиусе r_0=0.58 мкм. Наши две частицы имеют большие радиусы, и для них величина светового давления составит 1.16% и 0.58% от гравитационного соответственно.

Их
движение можно описать как движение в чисто гравитационном поле, но с уменьшенной массой $M^*=M\cdot(1-K)$. Очевидно, что скорость частиц v, равная круговой скорости для полной массы Солнца, здесь будет больше круговой, и движение будет происходить по эллипсу, для которого точка запуска будет точкой перигелия:

$$v^2 = \frac{GM}{L} = \frac{GM(1-K)}{L}(1+e).$$

Отсюда мы получаем выражение для эксцентриситета:

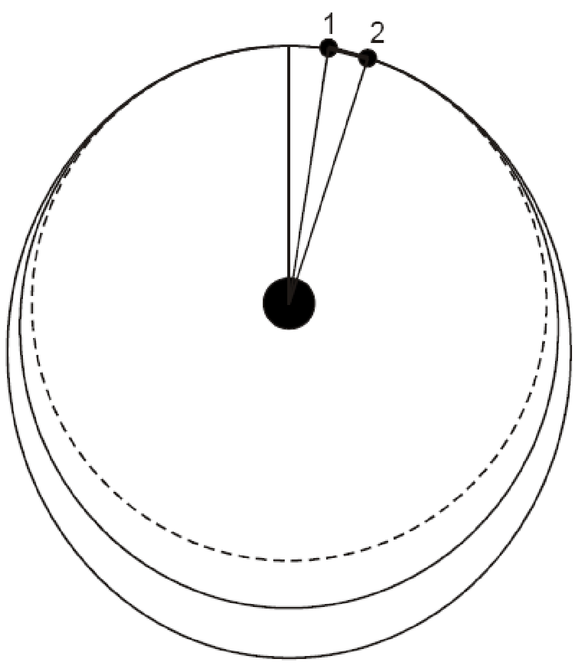
$$e = \frac{K}{1-K}.$$

Определение периода обращения каждой из пылинок

Надо понимать, что период обращения увеличится за счет 2-х факторов: увеличение большой полуоси орбиты и уменьшения массы

Поскольку точка запуска является точкой перигелия, можно записать $a_0 = a\,(1-e)$, откуда большая полуось орбиты в астрономических единицах составит $a/a_0 = 1/(1-e)$. Период обращения в годах мы можем определить из III закона Кеплера с учетом изменившейся массы:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{(1-e)^3(1-K)}} = \sqrt{\frac{(1-K)^3}{(1-2K)^3(1-K)}} = \frac{1-K}{\sqrt{(1-2K)^3}} \approx 1+2K.$$



Расстояние между шарами составит

$$d = v(t_1 - t_2) = 2vT_0 r_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 4\pi r_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ а.е.} = 0.073 \text{ а.е.}$$

Отметим, что если бы мы произвели вычисления без приближений в последних трех формулах, мы бы получили ответ 0.076 а.е.

11.6. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.6.